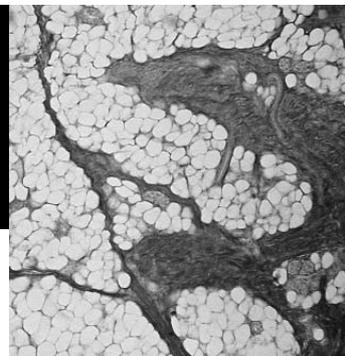


2

Potencias, radicales y logaritmos



1. Potencias de exponente natural y entero

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente las siguientes potencias:

- a) 2^3 b) $(-2)^3$ c) -2^3 d) $-(-2)^3$

Solución:

- a) 8 b) -8 c) -8 d) 8

APLICA LA TEORÍA

1 Calcula mentalmente los cinco primeros cuadrados perfectos.

Solución:

0, 1, 4, 9, 16

2 Calcula mentalmente:

- a) 2^4 b) $(-2)^4$ c) -2^4 d) $-(-2)^4$

Solución:

- a) 16 b) 16 c) -16 d) -16

3 Calcula mentalmente:

- a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ c) $-\left(\frac{2}{3}\right)^3$ d) $-(-\frac{2}{3})^3$

Solución:

- a) $\frac{8}{27}$ b) $-\frac{8}{27}$ c) $-\frac{8}{27}$ d) $\frac{8}{27}$

4 Calcula mentalmente:

- a) 0^7 b) $(-5)^0$ c) 1^6 d) $(-6)^1$

Solución:

- a) 0 b) 1 c) 1 d) -6

5 Utilizando la calculadora, realiza las siguientes operaciones y redondea los resultados a dos decimales:

- a) $4,23^2$ b) $2,5^3$
c) $0,9^{12}$ d) $5,3 \cdot 10^7 \cdot 8,4 \cdot 10^3$

Solución:

- a) 17,89 b) 15,63
c) 0,28 d) $4,45 \cdot 10^{11}$

6 Escribe en forma de potencia de base 2:

- a) 32 b) 2 c) 1 d) $1/32$

Solución:

- a) 2^5 b) 2^1 c) 2^0 d) 2^{-5}

7 Utilizando la calculadora, realiza las siguientes operaciones y redondea los resultados a dos decimales:

- a) $(12,7^2 + 83) \cdot \sqrt{34,2}$
b) $(5,6^3 - 5,2 \cdot 47,5) : \sqrt{333,3}$
c) $(2,5^5 - 67,7 : 4,3) \cdot \sqrt{444,4}$

Solución:

- a) 1 428,63
b) -3,91
c) 1 726,77

- 8** Calcula mentalmente:
 a) $(3 + 4)^2$ b) $3^2 + 4^2$ c) $(5 - 3)^2$ d) $5^2 - 3^2$

Solución:

- a) 49 b) 25 c) 4 d) 16

- 9** Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias:
 a) $x^3 \cdot x^4$ b) $x^7 : x^3$ c) $(x^3)^2$ d) $x^3 \cdot x^4 : x^5$

Solución:

- a) x^7 b) x^4 c) x^6 d) x^2

- 10** Una pecera tiene forma cúbica y su arista mide 75 cm. Si está llena, ¿cuántos litros de agua contiene?

Solución:

$$V = 75^3 = 421\,875 \text{ cm}^3 = 421,875 \text{ litros.}$$

2. Radicales

PIENSA Y CALCULA

Halla mentalmente el valor de x en los siguientes casos:

- a) $\sqrt[3]{1000} = x$ b) $\sqrt[6]{x} = 10$ c) $\sqrt[3]{81} = 3$ d) $\sqrt[4]{16} = x$

Solución:

- a) $x = 10$ b) $x = 1\,000\,000$ c) $x = 4$ d) $x = \pm 2$

APLICA LA TEORÍA

- 11** Calcula mentalmente el valor de los siguientes radicales:

- a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[4]{16}$ d) $\sqrt{-36}$

Solución:

- a) ± 5 b) -2 c) ± 2 d) No tiene raíces reales.

- 12** Utilizando la calculadora, halla las siguientes raíces. Redondea los resultados a dos decimales.

- a) $\sqrt{345,67}$ b) $\sqrt[3]{895,34}$
 c) $\sqrt[4]{89,45}$ d) $\sqrt[5]{1\,000}$

Solución:

- a) 18,59 b) 9,64
 c) 3,08 d) 3,98

- 13** Escribe en forma de radical las potencias:

- a) $5^{1/3}$ b) $x^{-1/2}$ c) $a^{2/3}$ d) $6^{-3/4}$

Solución:

- a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ c) $\sqrt[3]{a^2}$ d) $\frac{1}{\sqrt[4]{6^3}}$

- 14** Escribe en forma de potencia los radicales:

- a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt[5]{a^2}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ d) $\frac{1}{\sqrt[2]{6^5}}$

Solución:

- a) $7^{1/2}$ b) $a^{2/5}$ c) $a^{-1/3}$ d) $6^{-5/7}$

- 15** Simplifica los siguientes radicales:

- a) $\sqrt{5^4}$ b) $\sqrt[6]{x^2}$ c) $\sqrt[8]{5^6}$ d) $\sqrt[12]{a^8}$

Solución:

- a) 25 b) $\sqrt[3]{x}$ c) $\sqrt[4]{5^3}$ d) $\sqrt[3]{a^2}$

- 16** Introduce dentro del radical el factor que está delante:

- a) $3\sqrt{5}$ b) $a\sqrt[3]{4}$
 c) $2^4 a \sqrt[5]{2a^2}$ d) $3^2 x^3 \sqrt[4]{5x}$

Solución:

- a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt[3]{4a^3}$
 c) $\sqrt[5]{2^{13}a^5}$ d) $\sqrt[4]{5 \cdot 3^8 x^{13}}$

23 Sustituye los puntos suspensivos por igual, =, o distinto, ≠:

a) $\sqrt[3]{5^2} \dots (\sqrt[3]{5^2})^2$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{7}} \dots \sqrt[5]{7}$

Solución:

a) = b) ≠

24 Racionaliza:

a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$ c) $\frac{2}{\sqrt{5+\sqrt{3}}}$
 d) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ e) $\frac{7}{\sqrt[3]{14}}$ f) $\frac{5}{2-\sqrt{3}}$

Solución:

a) $\frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{3} = 2 \cdot \sqrt{3}$

b) $\frac{10 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{5} = 2 \cdot \sqrt[3]{5^2}$

c) $\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} =$
 $= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$

d) $\frac{4 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$

e) $\frac{7 \cdot \sqrt[3]{14^2}}{\sqrt[3]{14} \cdot \sqrt[3]{14^2}} = \frac{7 \cdot \sqrt[3]{14^2}}{14} = \frac{\sqrt[3]{14^2}}{2}$

f) $\frac{5(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{5(2+\sqrt{3})}{4-3} =$
 $= 5(2-\sqrt{3}) = 10-5\sqrt{3}$

4. Logaritmos

PIENSA Y CALCULA

Halla el valor de **x** en los siguientes casos:

a) $10^3 = x$ b) $10^x = 1\,000\,000$ c) $x^2 = 100$ d) $x^1 = 10$ e) $10^x = 1$

Solución:

a) $x = 1\,000$ b) $x = 6$ c) $x = \pm 10$ d) $x = 10$ e) $x = 0$

APLICA LA TEORÍA

25 Halla el valor de **x** en los siguientes casos:

a) $3^2 = x$ b) $x^3 = 27$ c) $3^x = 1/3$

Solución:

a) $x = 9$ b) $x = 3$ c) $x = -1$

27 Halla mentalmente los siguientes logaritmos:

a) $\log 100$ b) $\log 10$ c) $\log 0,001$

Solución:

a) 2 b) 1 c) -3

26 Halla el valor de **x** en los siguientes casos:

a) $2^{-3} = x$ b) $x^3 = 8$ c) $2^x = 1/4$

Solución:

a) $x = 1/8$ b) $x = 2$ c) $x = -2$

28 Halla mentalmente los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 32$ b) $\log_2 1$ c) $\log_2 1/8$

Solución:

a) 5 b) 0 c) -3

29 Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

- a) $\log 23,5$ b) $\log 267$ c) $\log 0,0456$

Solución:

- a) 1,3711 b) 2,4265 c) -1,3410

30 Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

- a) L 3 b) L 23,7 c) L 0,5

Solución:

- a) 1,0986 b) 3,1655 c) -0,6931

31 Utilizando las propiedades de los logaritmos y la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

- a) $\log 3^{15}$ b) $\log \sqrt[3]{23}$ c) $\log (0,5^{30} \cdot 7^{23})$

Solución:

- a) $15 \log 3 = 7,1568$
b) $(\log 23)/3 = 0,1945$
c) $30 \log 0,5 + 23 \log 7 = 10,4064$

32 Sustituye los puntos suspensivos por igual, =, o distinto, \neq :

a) $\log (7 + 5) \dots \log 7 + \log 5$

b) $\log 5^2 \dots 2 \log 5$

c) $\log \frac{6}{5} \dots \log 6 - \log 5$

d) $\log \sqrt[3]{5} \dots \log \frac{5}{3}$

Solución:

- a) \neq b) =
c) = d) \neq

33 Sabiendo que $\log 5 = 0,6990$, halla:

a) $\log 2$

b) $\log 20$

Solución:

$$\log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - 0,6990 =$$

$$= 0,3010$$

$$\log (2^2 \cdot 5) = 2 \log 2 + \log 5 =$$

$$= 2 \cdot 0,3010 + 0,6990 = 1,3010$$

Ejercicios y problemas

1. Potencias de exponente natural y entero

34 Calcula mentalmente los cinco primeros cubos perfectos.

Solución:

0, 1, 8, 27, 64

35 Calcula mentalmente:

a) 3^4 b) $(-3)^4$ c) -3^4 d) $-(-3)^4$

Solución:

a) 81 b) 81 c) -81 d) -81

36 Calcula mentalmente:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^3$ c) $-\left(\frac{3}{2}\right)^3$ d) $-\left(-\frac{3}{2}\right)^3$

Solución:

a) $\frac{27}{8}$ b) $\frac{27}{8}$ c) $-\frac{27}{8}$ d) $-\frac{27}{8}$

37 Calcula mentalmente:

a) 0^{10} b) $\left(\frac{3}{4}\right)^0$ c) 1^{-5} d) $\left(\frac{3}{4}\right)^1$

Solución:

a) 0 b) 1 c) 1 d) $\frac{3}{4}$

38 Utilizando la calculadora, realiza las siguientes operaciones y redondea los resultados a dos decimales:

a) $0,55^2$ b) $7,15^3$
c) $1,2^{10}$ d) $4,7 \cdot 10^{18} : 9,5 \cdot 10^5$

Solución:

a) 0,30 b) 365,53
c) 6,19 d) $4,95 \cdot 10^{22}$

39 Escribe en forma de potencia de base 3:

a) 81 b) 3 c) 1 d) $\frac{1}{27}$

Solución:

a) 3^4 b) 3^1 c) 3^0 d) 3^{-3}

40 Utilizando la calculadora, realiza las siguientes operaciones y redondea los resultados a dos decimales:

a) $(7,5^2 - 23,5) \cdot \sqrt{7,5}$

b) $(12,5^3 + 7,8 \cdot 12,76) : \sqrt{91}$

c) $(1,4^6 - 456,5 : 7,28) \cdot \sqrt{24,57}$

Solución:

a) 89,69
b) 215,18
c) -273,50

41 Calcula mentalmente:

a) $(5 + 6)^2$ b) $5^2 + 6^2$
c) $(10 - 8)^2$ d) $10^2 - 8^2$

Solución:

a) 121 b) 61
c) 4 d) 36

42 Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias:

a) $x^{-2} \cdot x^5$ b) $x^3 : x^7$
c) $(x^{-4})^3$ d) $x^{-3} \cdot x^5 : x^{-4}$

Solución:

a) x^3 b) x^{-4}
c) x^{-12} d) x^6

2. Radicales

43 Calcula mentalmente el valor de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt[4]{81}$ d) $\sqrt{-49}$

Solución:

a) ± 8
b) 4
c) ± 3
d) No tiene raíces reales.

44 Utilizando la calculadora, halla las siguientes raíces. Redondea los resultados a dos decimales.

a) $\sqrt{1000}$ b) $\sqrt[3]{100}$
c) $\sqrt[4]{1,25}$ d) $\sqrt[5]{524,5}$

Solución:

a) 31,62 b) 4,64
c) 1,06 d) 3,50

Ejercicios y problemas

45 Escribe en forma de radical las siguientes potencias:

- a) $x^{1/2}$ b) $5^{-1/3}$ c) $a^{3/4}$ d) $7^{-4/5}$

Solución:

- a) \sqrt{x} b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ c) $\sqrt[4]{a^3}$ d) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^4}}$

46 Escribe en forma de potencia los siguientes radicales:

- a) \sqrt{a} b) $\sqrt[3]{5^2}$ c) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$ d) $\frac{1}{\sqrt[6]{7^5}}$

Solución:

- a) $a^{1/2}$ b) $5^{2/3}$ c) $a^{-1/4}$ d) $7^{-5/6}$

47 Simplifica los siguientes radicales:

- a) $\sqrt{2^6}$ b) $\sqrt[6]{x^3}$ c) $\sqrt[9]{a^6}$ d) $\sqrt[12]{5^9}$

Solución:

- a) 8 b) \sqrt{x} c) $\sqrt[3]{a^2}$ d) $\sqrt[4]{5^3}$

48 Introduce dentro del radical el factor que está delante:

- a) $5\sqrt{2}$ b) $a^2\sqrt[3]{5}$
c) $3^2a^4\sqrt[3]{3a}$ d) $5^2x^2y^4\sqrt[4]{5x^3y^2}$

Solución:

- a) $\sqrt{50}$ b) $\sqrt[3]{5a^6}$
c) $\sqrt[3]{3^7a^{13}}$ d) $\sqrt[4]{5^9x^{11}y^6}$

49 Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales:

- a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt[3]{81x^{15}}$
c) $\sqrt[4]{64a^{17}b^9}$ d) $\sqrt[5]{128x^{19}y^{15}x^{10}}$

Solución:

- a) $3\sqrt{2}$ b) $3x^5\sqrt[3]{3}$
c) $2a^4b^2\sqrt[4]{4ab}$ d) $2x^3y^3z^2\sqrt[5]{4x^4}$

3. Operaciones con radicales

50 Realiza las siguientes sumas y restas de radicales:

- a) $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{300}$
b) $3\sqrt{50} + 4\sqrt{18} - 5\sqrt{8} + 2\sqrt{200}$

Solución:

- a) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 10\sqrt{3} =$
 $= (5 - 2 + 3 - 4 + 10)\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$
b) $15\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 20\sqrt{2} =$
 $= (15 + 12 - 10 + 20)\sqrt{2} = 37\sqrt{2}$

51 Utilizando la calculadora, halla la siguiente suma y resta de radicales. Redondea el resultado a dos decimales:

$$5\sqrt{23} - 2\sqrt{47} + 7\sqrt{19}$$

Solución:

40,78

52 Realiza los siguientes productos:

- a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{10}$
c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{3}$

Solución:

- a) $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
b) $\sqrt[3]{120} = 2\sqrt[3]{15}$
c) m.i.c.(2, 3) = 6
 $\sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{108}$
d) m.i.c.(4, 6) = 12
 $\sqrt[12]{5^3} \cdot \sqrt[12]{3^2} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 3^2} = \sqrt[12]{1125}$

53 Realiza los siguientes cocientes:

- a) $\sqrt{6} : \sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{40} : \sqrt[3]{5}$
c) $\sqrt[3]{9} : \sqrt{12}$ d) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{3}$

Solución:

- a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt[3]{8} = 2$
c) m.i.c.(2, 3) = 6
 $\sqrt[6]{9^2} : \sqrt[6]{12^3} = \sqrt[6]{9^2 : 12^3} = \sqrt[6]{\frac{3}{2^6}} = \frac{1}{2}\sqrt[6]{3}$
d) m.i.c.(3, 5) = 15
 $\sqrt[15]{2^5} : \sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{2^5 : 3^3} = \sqrt[15]{32/27}$

54 Sustituye los puntos suspensivos por igual, =, o distinto, ≠:

- a) $\sqrt[3]{7^2} \dots (\sqrt{7})^3$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} \dots \sqrt[6]{5}$

Solución:

- a) ≠ b) =

55 Racionaliza:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{8}{\sqrt[3]{7^2}}$ c) $\frac{7}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

Solución:

a) $\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

b) $\frac{8 \cdot \sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[3]{7}} = \frac{8 \cdot \sqrt[3]{7}}{7}$

c) $\frac{6(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} = \frac{6(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{7 - 5} =$
 $= \frac{6(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{2} = 3(\sqrt{7} + \sqrt{5})$

56 Racionaliza:

a) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{12}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\frac{14}{3 - \sqrt{3}}$

Solución:

a) $\frac{10 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{10 \cdot \sqrt{6}}{6} = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{12}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{12 \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{12 \cdot \sqrt[3]{2}}{2} = 6 \cdot \sqrt[3]{2}$

c) $\frac{14(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \frac{14(3 + \sqrt{3})}{9 - 3} =$
 $= \frac{14(3 + \sqrt{3})}{6} = \frac{7(3 + \sqrt{3})}{3}$

4. Logaritmos

57 Halla mentalmente el valor de x en los siguientes casos:

a) $2^5 = x$ b) $x^{-1} = 2$ c) $2^x = 1/4$

Solución:

a) $x = 32$ b) $x = 1/2$ c) $x = -2$

58 Halla mentalmente el valor de x en los siguientes casos:

a) $5^{-3} = x$ b) $x^3 = 125$ c) $5^x = 1$

Solución:

a) $x = 1/125$ b) $x = 5$ c) $x = 0$

59 Halla mentalmente los siguientes logaritmos:

a) $\log 1000$ b) $\log 1$ c) $\log 10^{-6}$

Solución:

a) 3 b) 0 c) -6

60 Halla mentalmente los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 9$ b) $\log_3 1/27$ c) $\log_3 1$

Solución:

a) 2 b) -3 c) 0

61 Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales:

a) $\log 405,75$ b) $\log 1,9$ c) $\log 0,0005$

Solución:

a) 2,6083 b) 0,2788 c) -3,3010

62 Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

a) L 5 b) L 25,8 c) L 0,034

Solución:

a) 1,6094 b) 3,2504 c) -3,3814

63 Utilizando las propiedades de los logaritmos y la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

a) $\log 2^{10}$ b) $\log \frac{867}{3}$ c) $\log (5^{23} : 3,4^{15})$

Solución:

a) $10 \log 2 = 3,0123$

b) $\log 867 - \log 3 = 2,4609$

c) $23 \log 5 - 15 \log 3,4 = 8,1041$

64 Sustituye los puntos suspensivos por igual, =, o distinto, \neq :

a) $\log (12 : 19) \cdots \log 12 - \log 19$

b) $\log \sqrt[3]{7} \cdots 3 \log 7$

c) $\log (22 + 8) \cdots \log 22 + \log 8$

d) $\log (22 + 8) \cdots \log 30$

Solución:

a) =

b) =

c) \neq

d) =

Ejercicios y problemas

65 Sabiendo que $\log 2 = 0,3010$, halla:

- a) $\log 25$ b) $\log 50$

Solución:

$$\begin{aligned}\log \frac{100}{4} &= \log \frac{100}{2^2} = \log 100 - 2 \log 2 = \\ &= 2 - 2 \cdot 0,3010 = 1,398\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log \frac{100}{2} &= \log 100 - \log 2 = 2 - 0,3010 = \\ &= 1,6990\end{aligned}$$

Para ampliar

66 Escribe en forma de radical las siguientes potencias y halla mentalmente el resultado:

- a) $8^{1/3}$ b) $9^{-1/2}$ c) $25^{3/2}$ d) $8^{2/3}$

Solución:

- a) $\sqrt[3]{8} = 2$
b) $\frac{1}{\sqrt{9}} = \pm \frac{1}{3}$
c) $(\sqrt{25})^3 = (\pm 5)^3 = \pm 125$
d) $(\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

Efectúa las siguientes operaciones:

67 a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

Solución:

- a) $3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$
b) $3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$

68 $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

Solución:

$$3 - 2 = 1$$

69 $3\sqrt{50} - 5\sqrt{32} + 3\sqrt{98}$

Solución:

$$15\sqrt{2} - 20\sqrt{2} + 21\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

70 a) $\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}$ b) $\sqrt{6} : \sqrt{3}$

Solución:

- a) $\sqrt{30}$ b) $\sqrt{2}$

71 a) $\sqrt[3]{5}\sqrt[4]{5}$ b) $\sqrt[3]{7} : \sqrt[4]{7}$

Solución:

- a) m.i.c.(3, 4) = 12
 $\sqrt[12]{5^4} \cdot \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{5^7}$
b) m.i.c.(3, 4) = 12
 $\sqrt[12]{7^4} : \sqrt[12]{7^3} = \sqrt[12]{7}$

72 Escribe con un solo radical:

- a) $\sqrt{\sqrt{a}}$ b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$

Solución:

- a) $\sqrt[4]{a}$ b) $\sqrt[8]{x}$

Racionaliza:

73 a) $\frac{8}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

Solución:

- a) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$
b) $\frac{(1 + \sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

74 a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

Solución:

- a) $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$
b) $\frac{(1 - \sqrt{5})\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 5}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} - 1$

75 a) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{9}{\sqrt[3]{3^2}}$

Solución:

a) $\frac{4\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{4\sqrt[3]{2^2}}{2} = 2\sqrt[3]{2^2}$

b) $\frac{9\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{3}} = \frac{9\sqrt[3]{3}}{3} = 3\sqrt[3]{3}$

76 a) $\frac{21}{\sqrt[5]{7}}$ b) $\frac{35}{\sqrt[5]{7^3}}$

Solución:

a) $\frac{21\sqrt[5]{7^4}}{\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{7^4}} = \frac{21\sqrt[5]{7^4}}{7} = 3\sqrt[5]{7^4}$

b) $\frac{35\sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^3} \cdot \sqrt[5]{7^2}} = \frac{35\sqrt[5]{7^2}}{7} = 5\sqrt[5]{7^2}$

77 a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

Solución:

a) $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{3 - \sqrt{6}}{3 - 2} = 3 - \sqrt{6}$

b) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6} + 2}{3 - 2} = \sqrt{6} + 2$

78 a) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

Solución:

a) $\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{3 + 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2} = 5 + 2\sqrt{6}$

b) $\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{3 - 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2} = 5 - 2\sqrt{6}$

Reduce al logaritmo de una sola expresión:

79 $\log 5 + \log 6 - \log 2$

Solución:

$\log \frac{5 \cdot 6}{2} = \log 15$

80 $2 \log 7 + 3 \log 5$

Solución:

$\log (7^2 \cdot 5^3) = \log 6125$

81 $3 \log a + 2 \log b - 5 \log c$

Solución:

$\log \frac{a^3 \cdot b^2}{c^5}$

82 $2 \log x - 5 \log y + 3 \log z$

Solución:

$\log \frac{x^2 \cdot z^3}{y^5}$

83 $\frac{1}{2} \log x + \frac{1}{3} \log y$

Solución:

$\log (\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}) = \log \sqrt[6]{x^3 y^2}$

Con calculadora

Utilizando la calculadora, halla el valor de la siguiente expresión. Redondea el resultado a dos decimales.

84 $(5,3^4 - 3,4 \cdot 7,28)\sqrt[5]{12,2}$

Solución

1 260,47

85 a) $4\pi \cdot 7,5^2$ b) $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 7,5^3$

Solución

a) 706,86

b) 1 767,15

86 a) $5^{2,25}$ b) $7,5^{3,4}$

Solución

a) 37,38

b) 944,51

87 a) π^e b) e^π

Solución

a) 22,46

b) 23,14

Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

Ejercicios y problemas

88 a) $\log \pi$ b) $\log \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ c) $\log e$

Solución

a) 0,4971 b) 0,2090 c) 0,4343

89 a) $L \pi$ b) $L \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ c) $L 10$

Solución

a) 1,1447 b) 0,4812 c) 2,3026

Problemas

90 Calcula el volumen de un cubo de área 5 m^2

Solución:

$$6a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{5}{6}} = 0,91 \text{ m}$$

$$V = a^3$$

$$V = 0,91^3 = 0,75 \text{ m}^3$$

91 Una escalera está apoyada sobre la fachada de un edificio. Si la escalera mide 13 m de longitud y el pie de la escalera está a 5 m de la pared, ¿a qué altura de la pared llega la escalera?

Solución:

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ m}$$



92 Una población crece según la función dada por $P(t) = p \cdot 1,0025^t$, donde t es el tiempo en años. Si en el año 2000 tenía un millón de habitantes, siendo p la población inicial, ¿cuántos habitantes tendrá en el año 2050?

Solución:

$$P(50) = 1 \cdot 10^6 \cdot 1,0025^{50} = 1\,132\,972 \text{ habitantes.}$$

93 Halla la arista de un cubo cuyo volumen es 7 m^3 . Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

$$V = a^3$$

$$a^3 = 7 \Rightarrow a = \sqrt[3]{7} = 1,91 \text{ m}$$

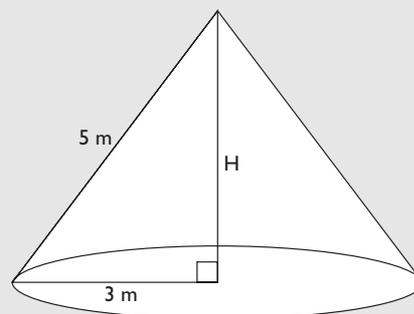
94 La cantidad de madera de un bosque crece según la función $y = x \cdot 1,025^t$, donde t es el tiempo en años y x es la cantidad de madera inicial. Si en el año 2000 el bosque tiene $1\,000 \text{ km}^3$ de madera, ¿cuánta madera tendrá en el año 2100?

Solución:

$$y = 1,025^{100} \cdot 1\,000 = 11\,813,72 \text{ km}^3$$

95 Halla el volumen de un cono en el que el radio de la base mide 3 m, y la generatriz, 5 m

Solución:



$$H = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ m}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi 3^2 \cdot 4 = 37,70 \text{ m}^3$$

96 La fórmula del capital final en el interés compuesto es $C = c(1 + r)^t$, donde C es el capital final, c es el capital inicial, r es el tanto por uno y t es el tiempo en años. Calcula en cada caso la incógnita que falta:

- a) $c = 10\,000 \text{ €}$, $r = 0,05$, $t = 6$ años
- b) $C = 15\,000 \text{ €}$, $r = 0,03$, $t = 8$ años
- c) $C = 30\,000 \text{ €}$, $c = 15\,000 \text{ €}$, $t = 10$ años
- d) $C = 50\,000 \text{ €}$, $c = 25\,000 \text{ €}$, $r = 0,07$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } C &= 10\,000 \cdot 1,05^6 = 13\,401 \text{ €} \\ \text{b) } c \cdot 1,03^8 &= 15\,000 \Rightarrow c = 11\,841,14 \text{ €} \\ \text{c) } 15\,000 \cdot (1+r)^{10} &= 30\,000 \\ (1+r)^{10} &= 2 \\ 10 \log(1+r) &= \log 2 \\ \log(1+r) &= \frac{\log 2}{10} \\ \log(1+r) &= 0,0301 \\ 1+r &= 1,072 \\ r &= 0,072 = 7,2\% \\ \text{d) } 25\,000 \cdot 1,07^t &= 50\,000 \\ 1,07^t &= 2 \\ t \log 1,07 &= \log 2 \\ t &= 10,24 \text{ años.} \end{aligned}$$

- 97** Las medidas de las tarjetas de crédito están en proporción áurea, es decir, el cociente entre la medida del largo y la medida del ancho es

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \text{ Si miden } 53 \text{ mm de ancho, ¿cuánto miden de largo?}$$

Solución:

$$\text{Longitud} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot 53 = 86 \text{ mm}$$

- 98** Una ameba es un ser unicelular que se reproduce por bipartición. Si partimos de un cultivo de 2000 amebas que se reproducen cada hora, ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir para que tengamos $5 \cdot 10^{12}$ amebas?

Solución:

$$\begin{aligned} 2000 \cdot 2^t &= 5 \cdot 10^{12} \\ 2^t &= 2,5 \cdot 10^9 \\ t \log 2 &= 9 + \log 2,5 \\ t &= 31,22 \text{ horas.} \end{aligned}$$

- 99** Supongamos que, en cada uno de los 10 años siguientes, el IPC es de un 2%. Si un producto cuesta actualmente 100 €, ¿cuánto costará al cabo de los 10 años?

Solución:

$$100 \cdot 1,02^{10} = 121,90 \text{ €}$$

Para profundizar

- 100** Racionaliza:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \qquad \text{b) } \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} &= \frac{a + 2\sqrt{ab} + b}{a - b} = \\ &= \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{a - b} \\ \text{b) } \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} &= \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{a - b} = \\ &= \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{a - b} \end{aligned}$$

- 101** Una moto se devalúa un 15% cada año. Si nos ha costado 5000 €, ¿qué valor tendrá al cabo de 10 años?

Solución:

$$5000 \cdot 0,85^{10} = 984,37 \text{ €}$$

- 102** Halla el área y el volumen de una esfera de radio $R = 3,5 \text{ m}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 4\pi \cdot R^2 \\ \text{Área} &= 4\pi \cdot 3,5^2 = 153,94 \text{ m}^2 \\ \text{Volumen} &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \\ \text{Volumen} &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3,5^3 = 179,59 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

- 103** Se ha obtenido experimentalmente que la presión atmosférica viene dada por la función $p(x) = 0,9^x$, donde x es la altura sobre el nivel del mar. La altura se mide en kilómetros, y la presión, en atmósferas.

- a) Halla la presión en lo alto de una montaña de 3500 m
b) Halla la altura a la que hay que subir para que la presión sea de 0,8 atmósferas.

Solución:

$$\text{a) } P(3,5) = 0,9^{3,5} = 0,69 \text{ atmósferas.}$$

Ejercicios y problemas

$$b) 0,9^x = 0,8$$

$$x \log 0,9 = \log 0,8$$

$$x = 2,118 \text{ km} = 2128 \text{ m}$$

104 La masa de un cuerpo radioactivo viene dada por la función $M = m(1/2)^t$, donde t es el número de períodos. Un período de semidesintegración es el tiempo necesario para que la masa se convierta en la mitad. Si tenemos 30 g de un cuerpo radioactivo

que tiene un período de 25 años, ¿cuántos años tienen que transcurrir para que tengamos 5 g de dicho cuerpo?

Solución:

$$30(1/2)^t = 5$$

$$(1/2)^t = 1/6$$

$$t \log 1/2 = \log 1/6$$

$$t = 2,58$$

$$N^\circ \text{ de años} = 2,58 \cdot 25 = 64,5 \text{ años.}$$

Aplica tus competencias

105 Una ciudad tiene 200 000 habitantes, y su población crece un 2,5% cada año. ¿Cuántos habitantes tendrá al cabo de 40 años?

Solución:

$$P = 200\,000 \cdot 1,025^{40} = 537\,013 \text{ habitantes.}$$

106 Una población de algas en un lago cubren una superficie de 25 m^2 . Si se reproducen a razón de $0,25 \text{ m}^2$ cada año, ¿cuántos metros cuadrados cubrirán al cabo de 30 años?

Solución:

$$P = 25 \cdot 1,25^{30} = 20\,194,84 \text{ m}^2$$

107 Tenemos una población inicial de 100 conejos en una gran llanura con comida abundante. Si se reproducen a razón de 20 conejos cada año, ¿cuántos conejos habrá al cabo de 5 años?

Solución:

$$P = 100 \cdot 20^5 = 32\,000\,000 \text{ conejos.}$$

Comprueba lo que sabes

- 1** Define qué es un logaritmo decimal y pon un ejemplo.

Solución:

Los **logaritmos decimales** son los logaritmos en los que la base es 10. En este caso la base 10, que es el subíndice, no se escribe.

$$\log p = x \Leftrightarrow 10^x = p$$

Ejemplo

$\log 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$

- 2** Escribe en forma de potencia de base 2:

- a) 64
- b) 1
- c) 2
- d) $\frac{1}{8}$

Solución:

- a) 2^6
- b) 2^0
- c) 2^1
- d) 2^{-3}

- 3** Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales:

- a) $\sqrt{98}$
- b) $\sqrt[3]{81x^8}$
- c) $\sqrt[4]{128a^{15}b^{10}}$
- d) $\sqrt[5]{64x^{18}y^{12}z^{10}}$

Solución:

- a) $7\sqrt{2}$
- b) $3x^2\sqrt[3]{3x^2}$
- c) $2a^3b^2\sqrt[4]{2^3a^3b^2}$
- d) $2x^3y^2z^2\sqrt[5]{2x^3y^2}$

- 4** Racionaliza:

- a) $\frac{12}{\sqrt{6}}$
- b) $\frac{8}{\sqrt[3]{2}}$
- c) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

Solución:

- a) $\frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$
- b) $\frac{8\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^2}} = \frac{8\sqrt[3]{2^2}}{2} = 4\sqrt[3]{2^2}$
- c) $\frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{5 + 2\sqrt{15} + 3}{5 - 3} = \frac{8 + 2\sqrt{15}}{2} = 4 + \sqrt{15}$

- 5** Halla mentalmente el valor de x en los siguientes casos:

- a) $2^{-4} = x$
- b) $x^3 = -8$
- c) $2^x = 1/8$

Solución:

- a) $x = \frac{1}{16}$
- b) $x = -2$
- c) $x = -3$

- 6** Sabiendo que $\log 2 = 0,3010$, halla:

- a) $\log 5$
- b) $\log 50$

Solución:

- a) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,3010 = 0,6990$
- b) $\log 50 = \log (5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = 0,6990 + 1 = 1,6990$

- 7** Halla la diagonal de un cubo de forma exacta, es decir, da el resultado en forma de un radical, cuando el volumen mide 5 m^3

Solución:

- $V = a^3$
- $a^3 = 5 \Rightarrow a = \sqrt[3]{5}$
- $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$
- $d = \sqrt[3]{5} \sqrt{3} = \sqrt[6]{5^2} \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{5^2 3^3} = \sqrt[6]{675} \text{ m}$

- 8** Una célula se reproduce por bipartición cada 5 horas. Si se parte inicialmente de 400 células, ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir para que haya 1 millón de células?

Solución:

$$400 \cdot 2^t = 1\,000\,000$$

$$2^t = 2\,500$$

$$t \log 2 = \log 2\,500$$

$$t = \frac{\log 2\,500}{\log 2} = 11,29$$

$$\text{N}^\circ \text{ de horas} = 11,29 \cdot 5 = 56,45 \text{ horas.}$$

Paso a paso**108** Calcula: $2,5^3$ **Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

109 Calcula: $(3^5 - 19) \cdot \sqrt{28,09}$ **Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

110 Calcula: $\sqrt[5]{47}$ **Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

111 Calcula: $3\sqrt{50} - 4\sqrt{18}$ **Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

112 Racionaliza: $\frac{3}{\sqrt{2}}$ **Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

113 Racionaliza: $\frac{6}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ **Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

114 Calcula: $\log 25,43$ **Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

115 Calcula: $L 18,56$ **Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

*Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o Derive:***116** Un coche cuesta 30 000 € y se devalúa cada año un 17%. ¿Cuántos años tardará en valer menos de 6 000 €.**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

117 **Internet.** Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema.****Practica****118** Calcula:

a) $(12,7^2 + 83) \cdot \sqrt{34,2}$

b) $(5,6^3 - 5,2 \cdot 47,5) : \sqrt{333,3}$

Solución:

a) 1 428,6

b) -3,9101

Solución:

a) 18,592

b) 9,6382

c) 3,0754

d) 3,9811

119 Calcula:

a) $\sqrt{345,67}$

b) $\sqrt[3]{895,34}$

c) $\sqrt[4]{89,45}$

d) $\sqrt[5]{1000}$

120 Calcula:

a) $\sqrt{72} - \sqrt{50} + \sqrt{18}$

b) $2\sqrt{75} - 3\sqrt{12} + 5\sqrt{27}$

Solución:

- a) $4\sqrt{2}$
b) $19\sqrt{2}$

121 Racionaliza:

- a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{10}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

Solución:

- a) $2 \cdot \sqrt{3}$
b) $2 \cdot \sqrt{5}$
c) $-\sqrt{3} + \sqrt{5}$

122 Calcula:

- a) $\log 23,5$ b) $\log 267$ c) $\log 0,0456$

Solución:

- a) 1,3711
b) 2,4265
c) -1,341

123 Calcula:

- a) L 3 b) L 23,7 c) L 0,5

Solución:

- a) 1,0986
b) 3,1655
c) -0,69315

124 Calcula:

- a) $\log 3^{15}$ b) $\log \sqrt[7]{23}$ c) $\log (0,5^{30} \cdot 7^{23})$

Solución:

- a) 7,1568
b) 0,19453
c) 10,406

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de *Wiris* o *Derive*:

125 Una pecera tiene forma cúbica y la arista mide 75 cm. Si está llena, ¿cuántos litros de agua contiene?

Solución:

$$V = 7,5^3 = 421,88 \text{ dm}^3 = 421,88 \text{ litros.}$$

126 Supongamos que en cada uno de los 10 años siguientes el IPC es de un 2%. Si un producto cuesta hoy 100 €, ¿cuánto costará al cabo de los 10 años?

Solución:

$$100 \cdot 1,02^{10} = 121,9 \text{ €}$$

127 Una ameba es un ser unicelular que se reproduce por bipartición. Si partimos de un cultivo de 2 000 amebas que se reproducen cada hora, ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir para que tengamos $5 \cdot 10^{12}$ amebas?

Solución:

$$2000 \cdot 2^t = 5 \cdot 10^{12}$$

$$t = 31,219 \text{ años.}$$