1. $y = \dfrac{x^2+11}{x+5}$

a) **ESTUDIO DE f:**

1) **Dominio:** Como es un cociente del dominio habrá que excluir los valores que anulen el denominador.
Por tanto:
$$x+5=0 \Rightarrow x=-5$$

2) **Simetría:** A simple vista, como el denominador no es simétrico, podemos decir que no va a ser simétrica. Vamos a demostrarlo:
$$f(-x) = \frac{(-x)^2+11}{-x+5} = \frac{x^2+11}{-x+5}$$
Esta expresión no coincide ni con $f(x)$ ni con $-f(x)$. Por tanto no es simétrica.

3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.

4) **Continuidad:** La función es continua en su dominio, por ser un cociente de funciones continuas.

5) **Corte con los ejes:**
Eje X $\longrightarrow$ Hacemos $y=0$.
$$\frac{x^2+11}{x+5} = 0 \Longrightarrow x^2+11=0 \Longrightarrow \text{No hay solución}$$
Luego no corta al Eje X.
Eje Y $\longrightarrow$ Hacemos $x=0$.
$$y = \frac{0+11}{0+5} = \frac{11}{5}$$
Luego corta al Eje Y en el punto $\left(0, \dfrac{11}{5}\right)$

6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Empezamos por calcular las raices del numerador y del denominador:
- Raices del numerador $\longrightarrow$ No tiene.
- Raices del denominador $\longrightarrow x=-5$

El resultado de las regiones podemos observarlo en el cuadro 1.

7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:
- A. Verticales:
Buscamos entre las raices del denominador. Vamos a ver si es asíntota la recta $x=-5$.

	$(-\infty,-5)$	$(-5,+\infty)$
$\dfrac{x^2+11}{x+5}$	$-$	$+$

Cuadro 1: Estudio del signo de f

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2+11}{x+5}=\left[\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -5^-}\frac{x^2+11}{x+5}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to -5^+}\frac{x^2+11}{x+5}=+\infty\end{array}\right.$$

Luego la recta $x=-5$ es una asíntota vertical.

- A. Horizontales:

  Veamos que no tiene.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+11}{x+5}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+11}{x+5}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+11}{-x+5}=-\infty$$

  Por tanto, no tiene.

- A. Oblicuas:

  Como no tiene asíntotas horizontales vamos a buscar las oblicuas.

$$m=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^2+11}{x+5}}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+11}{x^2+5x}=1$$

$$n=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+11}{x+5}-x\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+11-x\cdot(x+5)}{x+5}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{11-5x}{x+5}=-5$$

  Por tanto la recta $y=x-5$ es una asíntota oblícua.

b) **ESTUDIO DE f':**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x+5)-(x^2+11)}{(x+5)^2}=\frac{2x^2+10x-x^2-11}{(x+5)^2}=\frac{x^2+10x-11}{(x+5)^2}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.

- Raices del numerador:

	$(-\infty,-11)$	$(-11,-5)$	$(-5,1)$	$(-1,+\infty)$
$\dfrac{x^2+10x-11}{(x+5)^2}$	$+$	$-$	$-$	$+$

Cuadro 2: Estudio del signo de la derivada de f

$x^2+10x-11=0 \Rightarrow x=1$; $x=-11$

- Raices del denominador:
  $x+5=0 \Rightarrow x=-5$

1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 2 podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(-\infty,-11)\cup(1,+\infty)$ y decrece en el intervalo $(-11,5)\cup(-5,1)$.
2) **Máximos y mínimos:** Observando el cuadro 2 el signo de la derivada, vemos que pasa de crecer a decrecer en x=-11, luego, como el punto pertenece al dominio, tiene ahí un máximo.
   En x=1 pasa de decrecer a crecer y también es del dominio, por lo que tiene ahí un mínimo.
   La segunda coordenada de cada punto se obtiene **SIEMPRE** sustituyendo en la función:

   x=-11 $\longrightarrow y=\dfrac{(-11)^2+11}{-11+5}=\dfrac{121+11}{-6}=\dfrac{132}{-6}=-22$
   x=1 $\longrightarrow y=\dfrac{1^2+11}{1+5}=\dfrac{12}{6}=2$

c) **ESTUDIO DE f'':**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{(2x+10)\cdot(x+5)^2-(x^2+10x-11)\cdot(x+5)\cdot 2}{(x+5)^4}=$$

$$=\frac{2x^2+10x+10x+50-(2x^2+20x-22)}{(x+5)^3}=\frac{2x^2+20x+50-2x^2-20x+22}{(x+5)^3}=$$

$$=\frac{72}{(x+5)^3}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión.

- Raices del numerador: No tiene

- Raices del denominador:
  $x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

Por tanto la tabla queda como sigue:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, +\infty)$
$\dfrac{72}{(x+5)^3}$	$-$	$+$

Cuadro 3: Estudio del signo de la derivada segunda de f

En conclusión, la función es cóncava en el intervalo $(-5, +\infty)$ y convexa en el intervalo $(-\infty, -5)$.
No hay puntos de inflexión, pues donde cambia el tipo de concavidad no pertenece al dominio.

RESUMEN

Dominio $\rightarrow \mathbb{R} - \{-5\}$

Simetría: No tiene.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

Eje X $\rightarrow$ No corta.

Eje Y $\rightarrow (0, \frac{11}{5})$

Regiones: Son:

$+ \rightarrow (-5, +\infty)$

$- \rightarrow (-\infty, -5)$

Asíntotas: Las asíntotas son:

A.V.: $x = -5$

A.H.: No tiene.

A.O.: $y = x - 5$

Crecimiento $\rightarrow (-\infty, -11) \cup (1, +\infty)$

Decrecimiento $\rightarrow (-11, -5) \cup (-5, 1)$

Máximos y mínimos: Son:

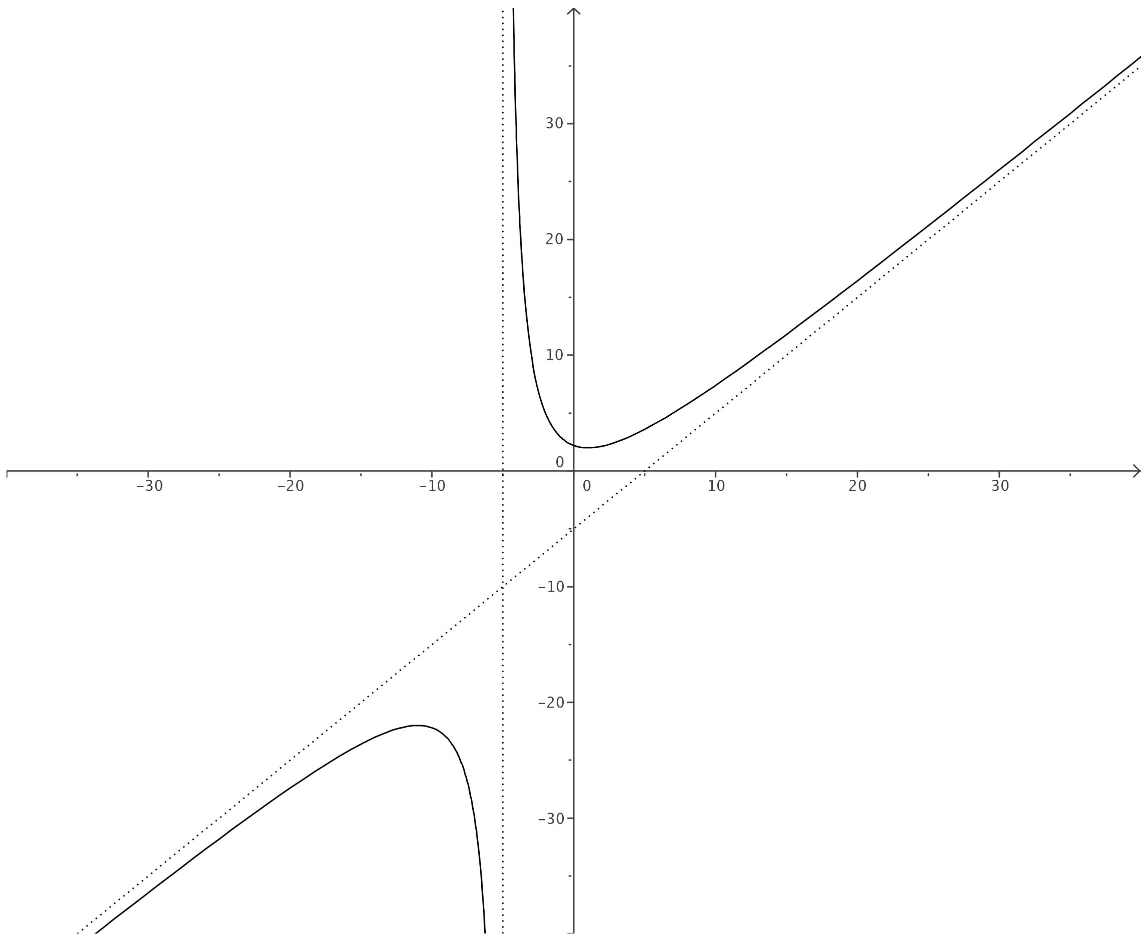
Máximo $\rightarrow (-11, -22)$

Mínimo $\rightarrow (1, 2)$

Cóncava $\rightarrow (-5, +\infty)$

Convexa $\rightarrow (-\infty, -5)$

P. Inflexión: No tiene.



2. $y = \dfrac{x^2}{9-x^2}$

a) **ESTUDIO DE f:**

1) **Dominio:** Como es un cociente del dominio habrá que excluir los valores que anulen el denominador.

   Por tanto:

$$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

2) **Simetría:** A simple vista observamos que la función va a ser simétrica. Vamos a demostrarlo:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{9-(-x)^2} = \frac{x^2}{9-x^2} = f(x)$$

3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.

4) **Continuidad:** La función es continua en su dominio, por ser un cociente de funciones continuas.

5) **Corte con los ejes:**

   Eje X $\longrightarrow$ Hacemos $y = 0$.

$$\frac{x^2}{9-x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

   Luego corta al Eje X en el punto $(0, 0)$.

   Eje Y $\longrightarrow$ Hacemos $x = 0$.

$$y = \frac{0}{9} = 0$$

   Luego corta al Eje Y en el punto $(0, 0)$

6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Empezamos por calcular las raices del numerador y del denominador:

   - Raices del numerador $\longrightarrow x = 0$
   - Raices del denominador $\longrightarrow x = \pm 3$

   Por tanto la tabla queda como sigue:

7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:

   - A. Verticales:

     Buscamos entre las raices del denominador. Vamos a ver si son asíntotas las rectas $x = -3$ y $x = 3$.

	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
$\dfrac{x^2}{9-x^2}$	$-$	$+$	$+$	$-$

Cuadro 4: Estudio del signo de f

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2}{9-x^2}=\left[\frac{9}{0}\right]=\left[\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -3^-}\frac{x^2}{9-x^2}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to -3^+}\frac{x^2}{9-x^2}=+\infty\end{array}\right.$$

Luego la recta $x=-3$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2}{9-x^2}=\left[\frac{9}{0}\right]=\left[\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2}{9-x^2}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2}{9-x^2}=-\infty\end{array}\right.$$

Luego la recta $x=3$ es una asíntota vertical.

- A. Horizontales:
  Veamos que la recta $y=-1$ es asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{9-x^2}=-1$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{9-x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{9-x^2}=-1$$

  En consecuencia, la recta $y=-1$ es asíntota horizontal.

- A. Oblicuas:
  Como tiene asíntota horizontal no puede tener oblicuas.

b) **ESTUDIO DE f':**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(9-x^2)-x^2\cdot(-2x)}{(9-x^2)^2}=\frac{18x-2x^3+2x^3}{(9-x^2)^2}=\frac{18x}{(9-x^2)^2}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.

- Raices del numerador:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
$\dfrac{18x}{(9-x^2)^2}$	$-$	$-$	$+$	$+$

Cuadro 5: Estudio del signo de la derivada de f

$18x = 0 \Rightarrow x = 0$

- Raices del denominador:
  $9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 5 podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(0,3) \cup (3,+\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty,-3) \cup (-3,0)$.
2) **Máximos y mínimos:** Observando en cuadro 5 el signo de la derivada, vemos que pasa de decrecer a crecer en $x = 0$ y es del dominio, por lo que tiene ahí un mínimo. La segunda coordenada se obtiene **SIEMPRE** sustituyendo en la función:
   x=0 $\longrightarrow y = 0$

c) **ESTUDIO DE f'':**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{18 \cdot (9-x^2)^2 - 2 \cdot (-2x) \cdot (9-x^2) \cdot 18x}{(9-x^2)^4} =$$

$$= \frac{162 - 18x^2 + 72x)}{(9-x^2)^3} = \frac{54x^2 + 162}{(9-x^2)^3} =$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión.

- Raices del numerador: No tiene
- Raices del denominador:
  $9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

Por tanto la tabla queda como sigue:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,+\infty)$
$\dfrac{54x^2+162}{(9-x^2)^3}$	$-$	$+$	$-$

Cuadro 6: Estudio del signo de la derivada segunda de f

En conclusión, la función es cóncava en el intervalo $(-3,3)$ y convexa en el intervalo

$(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

No hay puntos de inflexión, pues donde cambia el tipo de concavidad no pertenece al dominio.

RESUMEN

Dominio $\to \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

Simetría: Par. simétrica respecto Eje Y.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

Eje X $\to (0, 0)$

Eje Y $\to (0, 0)$

Regiones: Son:

$+ \to (-3, 0) \cup (0, 3)$

$- \to (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

Asíntotas: Las asíntotas son:

A.V.: $x = -3$; $x = 3$

A.H.: $y = -1$.

A.O.: No tiene.

Crecimiento $\to (-\infty, -3) \cup (-3, 0)$

Decrecimiento $\to (0, 3) \cup (3, +\infty)$

Máximos y mínimos: Son:

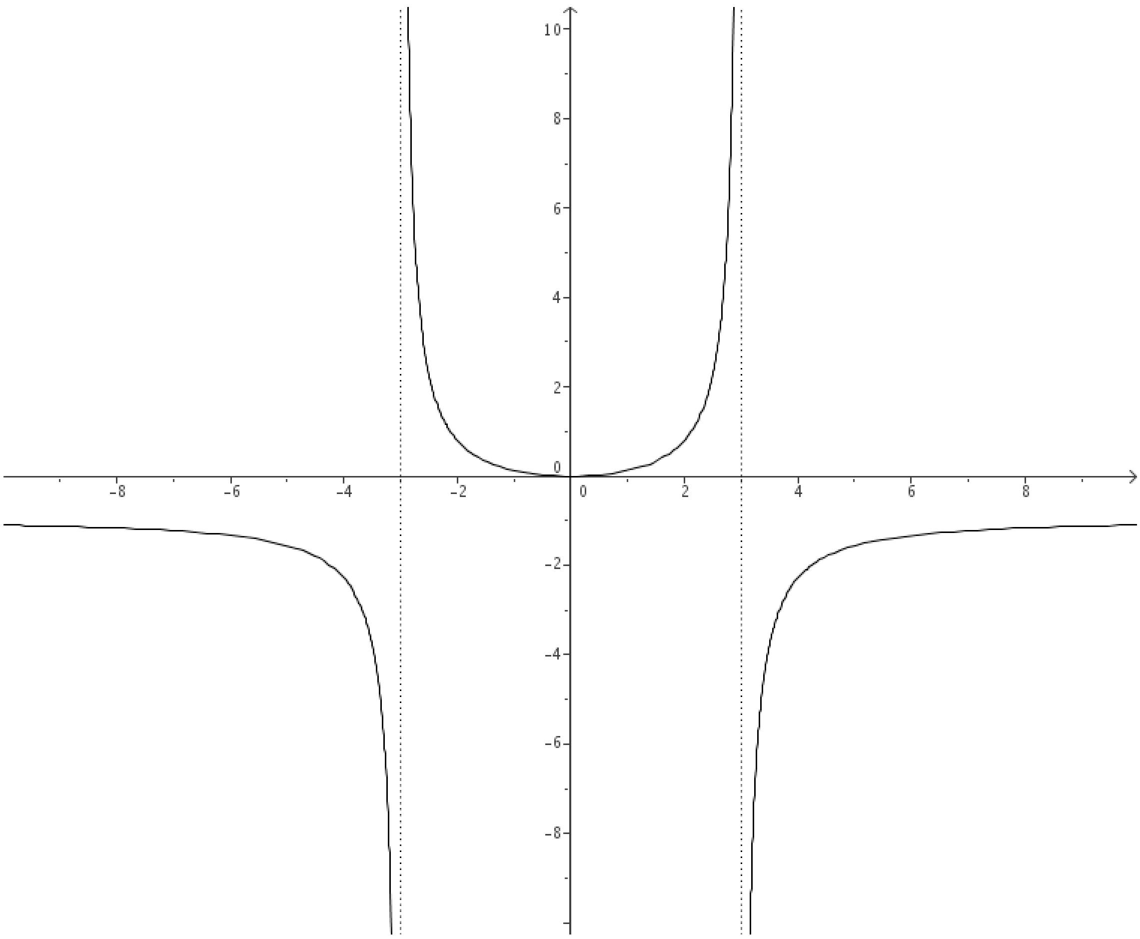
Máximo No tiene.

Mínimo $\to (0, 0)$

Cóncava $\to (-3, 3)$

Convexa $\to (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

P. Inflexión: No tiene.



3. $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

a) **ESTUDIO DE f:**

1) **Dominio:** Como es un cociente del dominio habrá que excluir los valores que anulen el denominador.
Por tanto:
$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

2) **Simetría:** A simple vista observamos que la función va a ser simétrica. Vamos a demostrarlo:
$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$$
Luego la función es impar o simétrica respecto del origen.

3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.

4) **Continuidad:** La función es continua en su dominio, por ser un cociente de funciones continuas.

5) **Corte con los ejes:**
Eje X $\longrightarrow$ Hacemos $y = 0$.
$$\frac{x^3}{x^2-1} = 0 \Longrightarrow x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0$$
Luego corta al Eje X en el punto $(0,0)$.

Eje Y $\longrightarrow$ Hacemos $x = 0$.
$$y = \frac{0}{0-1} = 0$$
Luego corta al Eje Y en el punto $(0,0)$

6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Empezamos por calcular las raices del numerador y del denominador:
   - Raices del numerador $\longrightarrow x = 0$
   - Raices del denominador $\longrightarrow x = \pm 1$

Por tanto el cuadro 7 queda como sigue:

7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:
   - A. Verticales:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$\dfrac{x^3}{x^2-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Cuadro 7: Estudio del signo de f

Buscamos entre las raices del denominador. Vamos a ver si son asíntotas las rectas $x=-1$ y $x=1$.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{x^2-1}=\left[\frac{-1}{0}\right]=\left[\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty\end{array}\right.$$

Luego la recta $x=-1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x^2-1}=\left[\frac{1}{0}\right]=\left[\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty\end{array}\right.$$

Luego la recta $x=1$ es una asíntota vertical.

- A. Horizontales:

  Veamos si las tiene.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-x^3}{x^2-1}=-\infty$$

  Luego no tiene.

- A. Oblicuas:

  Como no tiene asíntotas horizontales vamos a buscar las oblicuas.

$$m=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=1$$

$$n=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3-x\cdot(x^2-1)}{x+5}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$$

  Por tanto la recta $y=x$ es una asíntota oblícua.

b) **ESTUDIO DE f':**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.

- Raices del numerador:
  $x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = \pm\sqrt{3}$
- Raices del denominador:
  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

Cuadro 8: Estudio del signo de la derivada de f

1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 8 podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.
2) **Máximos y mínimos:** Observando en cuadro 8 el signo de la derivada, vemos que pasa de decrecer a crecer en $x = \sqrt{3}$ y es del dominio, por lo que tiene ahí un mínimo.
   Observando en cuadro 8 el signo de la derivada, vemos que pasa de crecer a decrecer en $x = -\sqrt{3}$ y es del dominio, por lo que tiene ahí un máximo.
   La segunda coordenada se obtiene **SIEMPRE** sustituyendo en la función:

   $\mathbf{x{=}-\sqrt{3}} \longrightarrow y = \dfrac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2-1} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$

   $\mathbf{x{=}\sqrt{3}} \longrightarrow y = \dfrac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2-1} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

c) **ESTUDIO DE f'':**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)\cdot(x^2-1)^2 - 2\cdot 2x \cdot (x^2-1)\cdot(x^4-3x^2)}{(9-x^2)^4} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} =$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión.

- Raices del numerador:
  $2x^3 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0$
- Raices del denominador:
  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$\dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Cuadro 9: Estudio del signo de la derivada segunda de f

Observando en el cuadro 9 la función es cóncava en el intervalo $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y convexa en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
Hay un sólo punto de inflexión, el $(0, 0)$, pues aunque en x=-1 y en x=1 cambia la concavidad, no hay punto de inflexión por no pertenecer al dominio.

RESUMEN

Dominio $\rightarrow \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Simetría: Impar.

Simétrica respecto del Origen.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

Eje X $\rightarrow (0, 0)$

Eje Y $\rightarrow (0, 0)$

Regiones: Son:

$+ \rightarrow (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

$- \rightarrow (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Asíntotas: Las asíntotas son:

A.V.: $x = -1$; $x = 1$

A.H.: No tiene.

A.O.: $y = x$

Crecimiento $\rightarrow (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Decrecimiento $\rightarrow (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

Máximos y mínimos: Son:

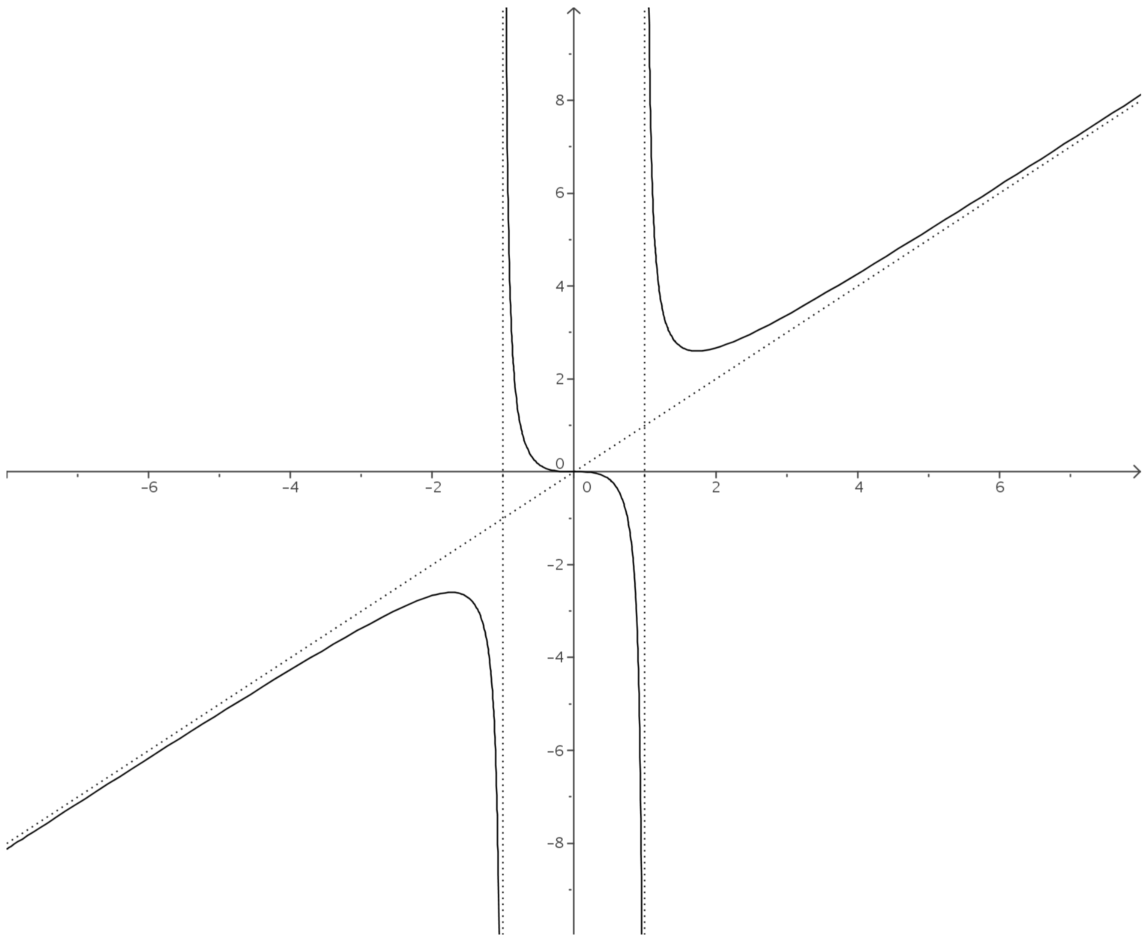
Máximo $\rightarrow (-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$.

Mínimo $\rightarrow (\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$

Cóncava $\rightarrow (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Convexa $\rightarrow (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

P. Inflexión: $\rightarrow (0, 0)$.



4. $y = \sqrt{x^2+1}$

a) **ESTUDIO DE f:**

1) **Dominio:** Como se trata de una raiz, al dominio pertenecerán los puntos que hagan que el radicando sea mayor o igual que cero. Como el radicando es siempre mayor o igual que 1 $(x^2+1) \geq 1$, el dominio es todo $\mathbb{R}$.
2) **Simetría:** A simple vista observamos que la función va a ser simétrica. Vamos a demostrarlo:
$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1} = f(x)$$

   Luego la función es par o simétrica respecto del Eje Y.
3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.
4) **Continuidad:** La función es continua en su dominio, por ser composición de funciones continuas. Por tanto es continua en todo $\mathbb{R}$.
5) **Corte con los ejes:**
   Eje X $\longrightarrow$ Hacemos $y = 0$.
$$\sqrt{x^2+1} = 0 \Longrightarrow x^2+1 = 0 \Longrightarrow$$

   Luego no corta al Eje X.

   Eje Y $\longrightarrow$ Hacemos $x = 0$.
$$y = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$$

   Luego corta al Eje Y en el punto $(0, 1)$
6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Se trata de la raiz positiva, luego la función es positiva en todo $\mathbb{R}$.
7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:
   - A. Verticales:
     En este caso no hay ningún valor que haga que la función se vaya al infinito (ningún valor real), por tanto no hay asíntotas verticales.
   - A. Horizontales:
     Veamos si las tiene.
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$$

Luego no tiene.

- A. Oblicuas:
  Como no tiene asíntotas horizontales vamos a buscar las oblicuas.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$$
$$n = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = 0$$

  Por tanto, cuando $x \longrightarrow +\infty$, la recta $y = x$ es una asíntota oblícua.
  Es un caso un poco particular, pues si calculamos los límites cuando $x \longrightarrow -\infty$ tenemos:
$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-x} = -1$$
$$n = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - (-x)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = 0$$

  Por tanto, cuando $x \longrightarrow -\infty$, la recta $y = -x$ es una asíntota oblícua.

b) **ESTUDIO DE f':**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.

- Raices del numerador:
  $x = 0$
- Raices del denominador:
  $\sqrt{x^2+1} = 0 \Rightarrow$ No tiene.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	$-$	$+$

Cuadro 10: Estudio del signo de la derivada de f

1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 10 podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(0, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$.

2) **Máximos y mínimos:** Observando en cuadro 10 el signo de la derivada, vemos que pasa de decrecer a crecer en $x = 0$ y es del dominio, por lo que tiene ahí un mínimo. La segunda coordenada se obtiene **SIEMPRE** sustituyendo en la función:

x=0 $\longrightarrow y = \sqrt{0^2 + 1} = 1 \Longrightarrow (0, 1)$

c) **ESTUDIO DE** f''**:**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{(x^2+1) \cdot \sqrt{x^2+1}}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión. Como $x^2 + 1 > 0 \Longrightarrow f''(x) > 0$ deducimos que la función es cóncava. Como no cambia de tipo de concavidad podemos deducir que la función no tiene puntos de inflexión.

d) Para afinar la representación gráfica vamos a hacer una pequeña tabla de valores:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$4'12$	$3'16$	$2'24$	$1'41$	1	$1'41$	$2'24$	$3'16$	$4'12$

RESUMEN

Dominio $\rightarrow \mathbb{R}$

Simetría: Par.

Simétrica respecto del Eje Y.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

- **Eje X** No corta.
- **Eje Y** $\rightarrow (0,1)$

Regiones: Son:

- $+ \rightarrow \mathbb{R}$
- $- \rightarrow$ No tiene.

Asíntotas: Las asíntotas son:

- **A.V.:** No tiene.
- **A.H.:** No tiene.
- **A.O.:** $\left[\begin{array}{ll} y = x & \text{cuando} x \rightarrow +\infty \\ y = -x & \text{cuando} x \rightarrow -\infty \end{array}\right.$

Crecimiento $\rightarrow (0, +\infty)$

Decrecimiento $\rightarrow (-\infty, 0)$

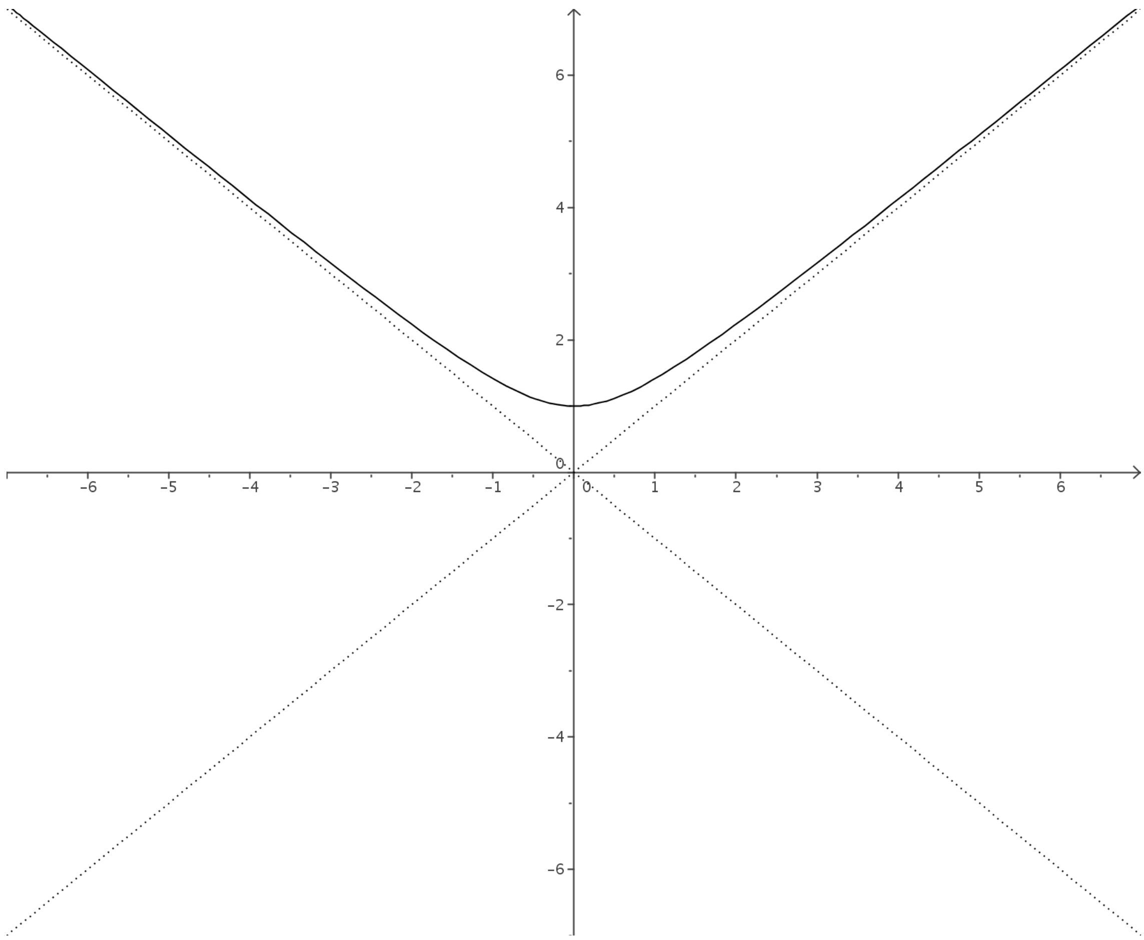
Máximos y mínimos: Son:

- **Máximo** No tiene.
- **Mínimo** $\rightarrow (0,1)$

Cóncava $\rightarrow \mathbb{R}$

Convexa No es

P. Inflexión: No tiene.



5. $y = \sqrt{x^2+2x}$

a) **ESTUDIO DE f:**

1) **Dominio:** Como se trata de una raiz, al dominio pertenecerán los puntos que hagan que el radicando sea mayor o igual que cero.
Veamos donde $x^2+2x \geq 0$.
Las raices son:

$$x^2+2x=0 \Longrightarrow x=0 \ ; \ x=-2$$

En virtud a lo que observamos en el cuadro 11, y teniendo en cuenta que el radicando

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
x^2+2x	$+$	$-$	$+$

Cuadro 11: Signo del radicando

tiene que ser mayor o igual que cero, el dominio es $(-\infty,-2] \cup [0,+\infty)$

2) **Simetría:** No va a ser simétrica, pues no lo es el polinomio. Vamos a demostrarlo:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+2(-x)} = \sqrt{x^2-2x}$$

Esta expresión no coincide ni con $f(x)$ ni con $-f(x)$. Por tanto no es simétrica.

3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.

4) **Continuidad:** La función es continua en su dominio, por ser composición de funciones continuas.

5) **Corte con los ejes:**
Eje X $\longrightarrow$ Hacemos $y=0$.

$$\sqrt{x^2+2x}=0 \Longrightarrow x^2+2x=0 \Longrightarrow x=0 \ ; \ x=-2$$

Luego corta al Eje X en $(-2,0)$; $(0,0)$.

Eje Y $\longrightarrow$ Hacemos $x=0$.

$$y=\sqrt{0+0}=\sqrt{0}=0$$

Luego corta al Eje Y en el punto $(0,0)$

6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Se trata de la raiz positiva, luego la función es positiva en todo su dominio.

7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:

- A. Verticales:

  En este caso no hay ningún valor que haga que la función se vaya al infinito (ningún valor real), por tanto no hay asíntotas verticales.

- A. Horizontales:

  Veamos si las tiene.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} = +\infty$$

  Luego no tiene.

- A. Oblicuas:

  Como no tiene asíntotas horizontales vamos a buscar las oblicuas.

  $m = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$

  $n = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right)} =$

  $= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 2x - x^2}{\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2} + x} = 1$

  Por tanto, cuando $x \longrightarrow +\infty$, la recta $y = x + 1$ es una asíntota oblícua.

  Es un caso un poco particular, pues si calculamos los límites cuando $x \longrightarrow -\infty$ tenemos:

  $m = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{-x} = -1$

  $n = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right) =$

  $= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)} =$

  $= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x - x^2}{\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2} + x} = -1$

  Por tanto, cuando $x \longrightarrow -\infty$, la recta $y = -x - 1$ es una asíntota oblícua.

b) **ESTUDIO DE f':**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} =$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.

- Raices del numerador:
  $x+1=0 \Longrightarrow x=-1$
- Raices del denominador:
  $\sqrt{x^2+2x}=0 \Rightarrow x=-2$; $x=0$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
$\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$	$-$	No existe	$+$

Cuadro 12: Estudio del signo de la derivada de f

1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 12 podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(0,+\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty,-2)$.
2) **Máximos y mínimos:** Observando el cuadro 12 vemos que no hay máximos ni mínimos, pues además el único valor que anula la derivada, $x=1$, no es del dominio.

$c)$ **ESTUDIO DE f'':**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\cdot\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}}{x^2+2x}=\frac{\dfrac{x^2+2x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}}}{x^2+2x}=$$

$$=\frac{x^2+2x-x^2-2x-1}{(x^2+2x)\cdot\sqrt{x^2+2x}}=\frac{-1}{(x^2+2x)\cdot\sqrt{x^2+2x}}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión.
De Observar el cuadro 13 deducimos que la función es convexa en su dominio y que no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
$\dfrac{-1}{(x^2+2x)\cdot\sqrt{x^2+2x}}$	$-$	No existe	$-$

Cuadro 13: Estudio del signo de la derivada segunda de f

RESUMEN

Dominio $\rightarrow (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

Simetría: No tiene.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

Eje X $\rightarrow (-2, 0)$; $(0, 0)$.

Eje Y $\rightarrow (0, 0)$

Regiones: Son:

$+ \rightarrow (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Asíntotas: Las asíntotas son:

A.V.: No tiene.

A.H.: No tiene.

A.O.: $\left[\begin{array}{ll} y = x + 1 & \text{cuando} x \rightarrow +\infty \\ y = -x - 1 & \text{cuando} x \rightarrow -\infty \end{array}\right.$

Crecimiento $\rightarrow (0, +\infty)$

Decrecimiento $\rightarrow (-\infty, -2)$

Máximos y mínimos: Son:

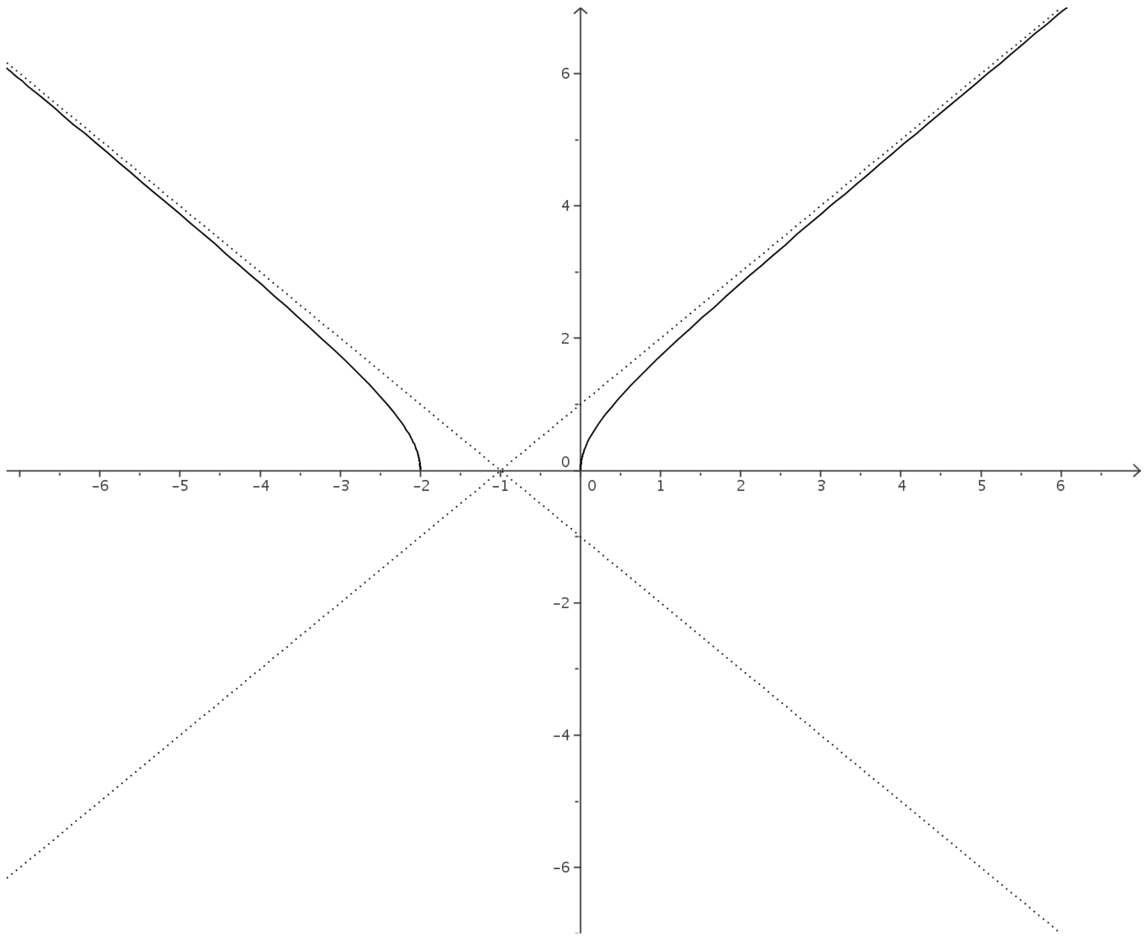
Máximo No tiene.

Mínimo No tiene.

Cóncava No es.

Convexa $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

P. Inflexión: No tiene.



6. $y = e^{-x^2}$

a) **ESTUDIO DE f:**

1) **Dominio:** Teniendo en cuenta el comportamiento de la función exponencial y que esta no se anula nunca, podemos afirmar que el dominio es todo $\mathbb{R}$.

$$y = e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$$

2) **Simetría:** Como el polinomio es par, la función va a serlo. Vamos a comprobarlo:

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$$

3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.
4) **Continuidad:** La función es continua por ser composición de funciones continuas.
5) **Corte con los ejes:**

Eje X $\longrightarrow$ Hacemos $y = 0$.

$$e^{-x^2} = 0$$

Esta ecuación no tiene solución, pues la exponencial no se anula nunca. Luego no corta al Eje X.

Eje Y $\longrightarrow$ Hacemos $x = 0$.

$$y = e^{-0} = 1$$

Luego corta al Eje Y en el punto $(0, 1)$

6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Se trata de una exponencial, luego la función es positiva en todo su dominio.
7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:
   - A. Verticales:
     En este caso no hay ningún valor que haga que la función se vaya al infinito (ningún valor real), por tanto no hay asíntotas verticales.
   - A. Horizontales:
     Veamos si las tiene.

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \to +\infty} e^{-(-x)^2} = \lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$$

Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

- A. Oblicuas:
  Como tiene asíntotas horizontales no puede tener oblicuas.

b) **ESTUDIO DE f':**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.
Veamos donde se anula $-2xe^{-x^2} = 0 \Longrightarrow -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, -2)$	$(0, +\infty)$
$-2xe^{-x^2}$	$+$	$-$

Cuadro 14: Estudio del signo de la derivada de f

1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 14 podemos afirmar que la función decrece en el intervalo $(0, +\infty)$ y crece en el intervalo $(-\infty, 0)$.
2) **Máximos y mínimos:** Observando el cuadro 14 vemos que la función pasa de crecer a decrecer en $x = 0$ y como pertenece al dominio hay en él un máximo.
   La segunda coordenada se obtiene **SIEMPRE** sustituyendo en la función:
   $\mathbf{x{=}0} \longrightarrow y = e^{-}0 = 1$

c) **ESTUDIO DE f'':**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x(-2xe^{-x^2}) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión.
Vamos a hallar los valores en los que se hace cero:

$$(4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0 \Longrightarrow 4x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

De Observar el cuadro 15 deducimos que la función es cóncava $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ y es convexa en $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$
$(4x^2-2)e^{-x^2}$	$+$	$-$	$+$

Cuadro 15: Estudio del signo de la derivada segunda de f

La función tiene dos puntos de inflexión que están en los puntos con coordenadas $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Como siempre sustituimos en la función para hallar la segunda coordenada:

$$\text{x}=\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow y = e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}}$$
$$\text{x}=\frac{-\sqrt{2}}{2} \longrightarrow y = e^{-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}}$$

RESUMEN

Dominio $\mathbb{R}$

Simetría: Par.

Simétrica respecto del Eje Y.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

Eje X $\rightarrow$ No corta.

Eje Y $\rightarrow (0, 1)$

Regiones: Son:

$+ \rightarrow \mathbb{R}$

Asíntotas: Las asíntotas son:

A.V.: No tiene.

A.H.: $y = 0$.

A.O.: No tiene.

Crecimiento $\rightarrow (-\infty, 0)$

Decrecimiento $\rightarrow (0, +\infty)$

Máximos y mínimos: Son:

Máximo $(0, 1)$.

Mínimo No tiene.

Cóncava $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$.

Convexa $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

P. Inflexión: $\longrightarrow (-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$; $(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$